|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Facultad de Ingeniería del Ejército – Grl Div Manuel N. Savio | Universidad de la Defensa Nacional  Facultad de Ingeniería del Ejército | |
| ***Curso de MATLAB/Octave***  *Entorno de programación* | | |
|  | | |
| Ing. Gianfranco Salomone  **Año 2020** | |  |

Tabla de contenido

[2. Tiro oblicuo 3](#_Toc39792251)

[3. Movimiento circular variado y sus proyecciones x e y 4](#_Toc39792252)

[4. Coeficiente de restitución 7](#_Toc39792253)

[5. Cinemática: lanzador rotativo 9](#_Toc39792254)

[6. Dinámica: fuerzas sobre una esfera en movimiento circular 11](#_Toc39792255)

[7. Campo eléctrico 13](#_Toc39792256)

[8. Trayectoria de una carga sumergida en un campo magnético 13](#_Toc39792257)

[9. Animación del tiro oblicuo 14](#_Toc39792258)

# ¿Simbólico o numérico?

Comparar los métodos simbólico y numérico para un tiro vertical.

Recordemos que en cinemática:

Esta ecuación es el resultado de plantear y resolver la ecuación diferencial que contiene *las causas* del movimiento: la fuerza peso y la aceleración:

# Tiro oblicuo

Se realiza un tiro oblicuo, despreciando el rozamiento del aire, con elevación , altura inicial , rapidez inicial . Considerando , y que el proyectil finaliza su trayectoria en la altura :

El tiempo de vuelo puede calcularse según

De estos dos valores, elegimos el positivo:

O bien:

max(roots([-.5\*g v0y y0])) % devuelve el máximo entre las dos raíces

1. Realice una gráfica de la trayectoria ( en función de )
2. Sobre la gráfica anterior, superponga los vectores velocidad (tengentes a la curva) en cuatro puntos diferentes

*Vector posición:*

*Vector velocidad:*

1. Realice una gráfica de la evolución temporal de posición, velocidad y aceleración
2. Determine la rapidez del móvil antes de tocar el suelo

*Vector velocidad final:*

Luego:

*Corroboración con conservación de la energía mecánica:*

(Nótese que es independiente del ángulo de disparo)

Utilice cualquier método a su disposición. Recuerde que puede utilizar métodos simbólicos, numéricos o analíticos. O todos.



***PARA QUIEN LA TENGA MÁS CLARA:***

Desarrollar una función

con argumentos:

* ,
* (ángulo con respecto a la horizontal),
* (altura de disparo), que

que devuelva:

* array con tiempo de vuelo
* array con posiciones en
* array con posiciones en

# Movimiento circular variado y sus proyecciones x e y



Un modelo aproximado para la posición de un tubo de ensayo en un agitador durante su etapa de aceleración constante, podría ser:

Siendo así, la velocidad tendrá la forma

Considere , , , ,

Se desea graficar

1. La trayectoria de uno de los tubos de ensayo, en coordenadas cartesianas, con respecto al eje de giro, tomando como eje al paralelo a la consola, que empiece en la posición



1. La evolución temporal de la posición angular y de la velocidad angular



1. Evolución temporal del eje x y del eje y



# Coeficiente de restitución

Se realiza un tiro vertical de una pelota. Considerando que cuando ésta impacta contra el suelo pierde 20% de la rapidez, grafique la evolución temporal de la posición vertical de la pelota.

***Método 1: ecuaciones de movimiento***

Antes del primer rebote:

Donde y . El tiempo de caída se encuentra reemplazando en la expresión

Las dos raíces pueden determinarse analítica o numéricamente.

Una de ellas será negativa, y no nos interesa en este caso. Nos concentramos en la positiva:

Justo antes de tocar el suelo, tenemos rapidez

Luego del rebote:

Esta expresión se repetirá todas las veces en que se produzca un rebote. es el tiempo que tardará el móvil en caer nuevamente, de manera que

Luego

Dejando de lado el caso trivial:

***Método 2: aproximación de Euler***

Si se tiene una función con derivada segunda conocida (aceleración conocida), es posible aproximar punto a punto la posición, suponiendo un comportamiento lineal:

Donde es un diferencial de tiempo *finito*. Otra manera de describir esta situación sería:

Donde los subíndices indican el instante de tiempo *discreto* bajo estudio.

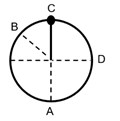
Para conocer cómo varía la velocidad en el tiempo:

En el caso de producirse el rebote, se revertirá la dirección de velocidad, y disminuirá su valor al 80%:



**ATENCIÓN:** la aproximación de Euler deja de converger a la función real para valores grandes de . Para evitar este problema (cuando la aceleración es variable), hay que utilizar métodos más poderosos, o un mucho menor, lo que requerirá mucho más almacenamiento.

# Cinemática: lanzador rotativo

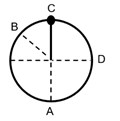
Un móvil se encuentra atado a una barra rígida de masa despreciable de largo L y realizando un movimiento circular acelerado en sentido horario, según se muestra en la figura. En el instante el cuerpo pasa por el punto A, con rapidez angular . El punto B se encuentra a un ángulo con respecto a la horizontal (tomada positiva hacia la derecha). Suponiendo un eje vertical que positivo con origen 1,5 m debajo de A, y que pase por C, graficar, por separado, la trayectoria del móvil si se soltara de la barra en el punto B, C y D

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Característica | Símbolo | Magnitud | Unidades |
| Masa de la barra |  | 0 |  |
| Longitud de la barra |  | 0,5 |  |
| Rapidez angular del sistema |  | 100 |  |

**Movimiento circular**



# Dinámica: fuerzas sobre una esfera en movimiento circular

Una esfera de masa y radio se encuentra atada a una barra rígida de masa y largo , realizando un movimiento circular **uniforme** en sentido anti-horario, según se muestra en la figura. En el instante el cuerpo pasa por el punto D. El punto B se encuentra a un ángulo con respecto a la horizontal (tomada positiva hacia la derecha). Hallar la neta realizada sobre la esfera en los puntos A, B, C y D

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Característica | Símbolo | Magnitud | Unidades |
| Masa de la barra |  | 0,5 |  |
| Longitud de la barra |  | 0,75 |  |
| Radio esfera |  | 0,01 |  |
| Masa esfera |  | 0,2 |  |
| Rapidez angular del sistema |  | 50 |  |

* **Método analítico 1: sumatoria de fuerzas**

En el punto B, las componentes de las fuerzas son:

Donde . Como la aceleración es centrípeta únicamente, podemos escribir su expresión en coordenadas cartesianas:

Dado que , porque el ángulo inicial es nulo, y

Separando en componentes:

* **Método analítico 2: estudio de la cinemática**

Vectorialmente, en un punto cualquiera, para una rapidez angular constante , definimos como distancia desde el centro de masa de la esfera al eje de rotación:

Velocidad:

Aceleración:

Fuerzas sobre el cuerpo, tensión de la barra y peso :

Para :

En componentes:

En módulo:

Primera aproximación de cálculo: realizamos la sustitución directa en las expresiones analíticas de y :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 0 |  |  | -4,6606 | 1,9600 | 5,0560 |
| 90 |  |  | ~0,0000 | -2,7006 | 2,7006 |
| 120 |  |  | 2,3303 | -2,0762 | 3,1211 |
| 270 |  |  | ~0,0000 | 6,6206 | 6,6206 |

Tabla .: cálculo de fuerza según su expresión analítica

Segunda aproximación de cálculo: obtenemos los valores numéricos de aceleración para todo (con ) y luego calculamos :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | -4,6606 | 1,9600 |
| 90 | -0,2218 | -2,6954 |
| 120 | 2,0696 | -2,2159 |
| 270 | 0,0739 | 6,6201 |

Tabla .: cálculo de fuerza utilizando primero el cálculo de aceleración analítica

Tercera aproximación de cálculo: los valores de aceleración se obtienen sólo numéricamente, con

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | -4,6497 | 1,6645 |
| 90 | -0,0739 | -2,6985 |
| 120 | 2,3295 | -2,0749 |
| 270 | -0,2217 | 6,6138 |

Tabla .: cálculo de fuerza utilizando primero el cálculo de aceleración numérica

El primer método utilizado, calculando , , , es el que menor error tiene.

En el segundo método, se calculó , aumentando el error.

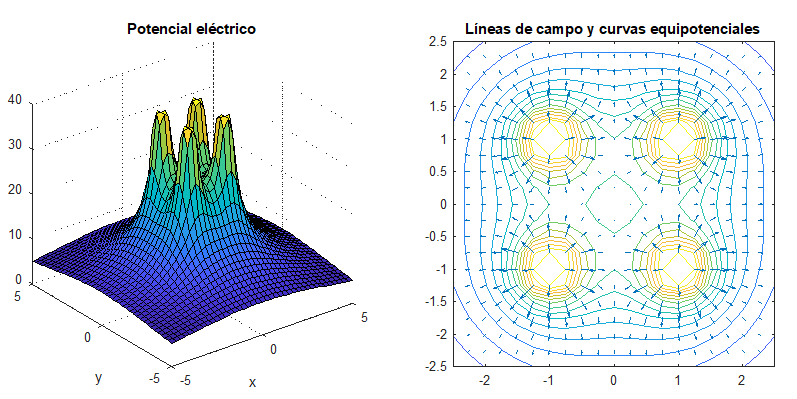
En el último método, el error aumenta todavía más, al evaluar numéricamente la segunda derivada de la posición.

# Campo eléctrico

Se tienen 4 cargas eléctricas iguales, ubicadas en los vértices de un cuadrado. En base a las expresiones de potencial eléctrico: y campo eléctrico , grafique

1. El potencial eléctrico tridimensional
2. Las curvas equipotenciales en el plano
3. Las líneas de campo eléctrico en el plano

Tal vez le sea más fácil iniciar el estudio con *una* carga.



# Trayectoria de una carga sumergida en un campo magnético



# Animación del tiro oblicuo

Métodos de animación de trayectoria de un punto:

* Llamada iterativa de la función plot
* Actualización de los datos de función

## ANEXO: Determinación analítica de la trayectoria de una carga en movimiento circular, sumergida en un campo magnético

Tenemos una partícula cargada, que se mueve con velocidad inicial , dentro de un campo magnético . La fuerza que realiza dicho campo magnético sobre la carga es

<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/SolutionsToSystems.aspx>

<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/LA_Eigen.aspx>

Solución propuesta:

Reemplazando en la ecuación diferencial:

Para que esta ecuación sea solución de la primera, debe ser autovalor de , así como debe ser autovector de .

*Autovalores:*

*Autovectores:*